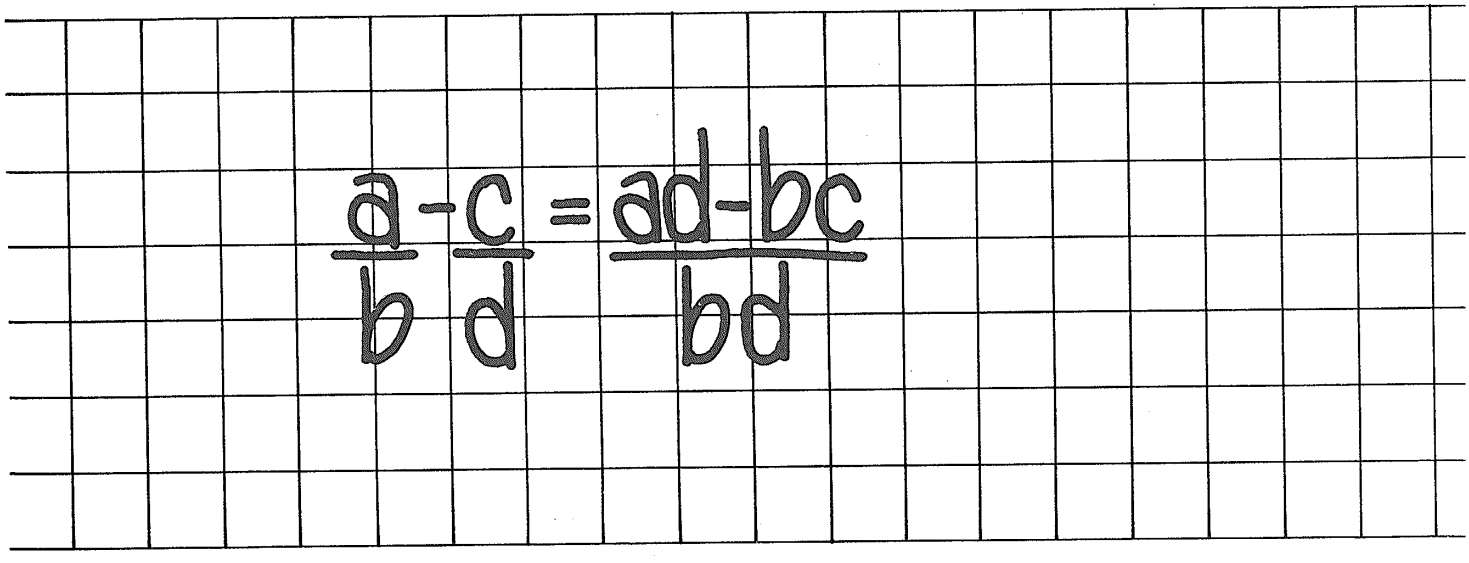
EL CONJUNTO DE LOS RACIONALES

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. ***El conjunto de los racionales***
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 10

EL CONJUNTO DE LOS RACIONALES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
EL CONJUNTO DE LOS RACIONALES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1510-1

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

10.1 El conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$) 9

10.2 El grupo abeliano ($\mathbb{Q}$, +) 33

10.3 El grupo abeliano ($\mathbb{Q}_0$, X) 41

10.4 El campo ($\mathbb{Q}_0$, + X) 47

10.5 La resta y la división en $\mathbb{Q}$ 50

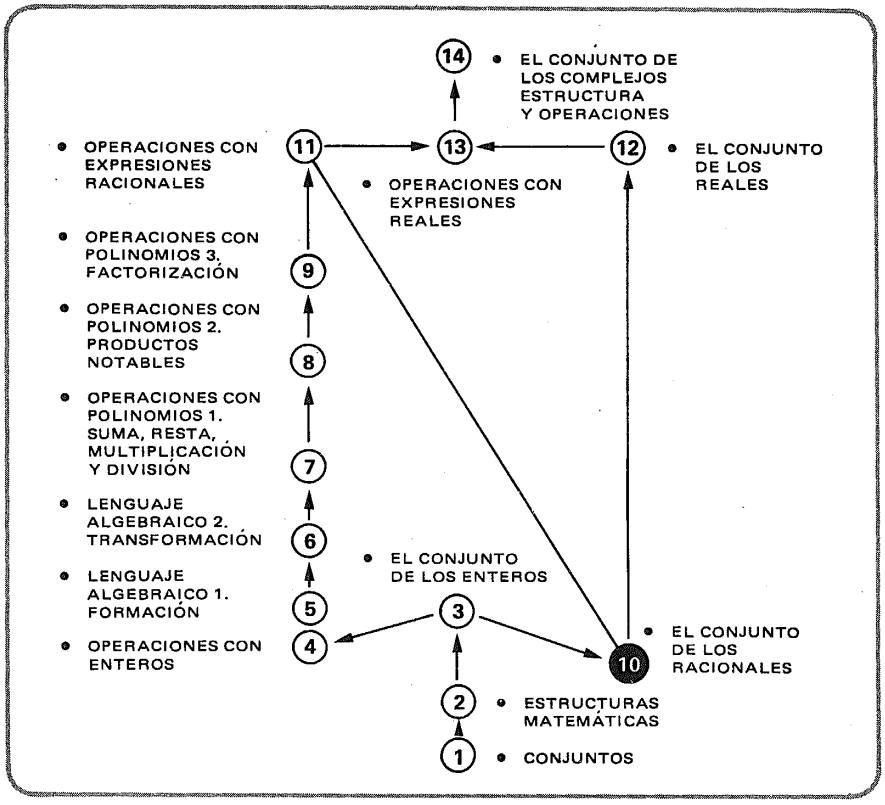
10.6 Fracción común y fracción decimal 53

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 10. El conjunto de los racionales

Objetivos: interpretar la suma, resta, multiplicación y división de números racionales como estructuras matemáticas con ciertas propiedades, de las que se deducen las reglas para la realización de dichas operaciones

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de las estructuras matemáticas con una o dos leyes de composición interna	1	2
• Concepto de número entero	1	3
• Manejo de los números enteros	1	4

10.1

El conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$)

1

$\frac{12}{4} = \square$

3

2

$\frac{15}{3} = \square$

5

3

$\frac{48}{6} = \square$

8

4

$\frac{25}{7} = \square$

Resultado
no definido
en el
conjunto
de los enteros.

5

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros,
la

división

está definida
sólo para
aquellos casos en que

$\square$

el dividendo
es

múltiplo

del
divisor
o, en otras palabras,
el divisor

es un **factor**

del dividendo

6

Pero, cuando el dividendo
y el divisor son

primos entre sí

el cociente

no

está definido en

$\mathbb{Z}$

7

No es suficiente
el conjunto de los enteros
para
que
la división esté definida
para todos los posibles pares de números.

8

Para que la división se defina para todo par de enteros,
es necesario

ampliar

el conjunto de los enteros,

como lo hicimos con el **conjunto de los naturales**

para que

la **sustracción o resta** se definiera.

9

Cuando quisimos que el resultado de la resta:

$$5 - 7$$

se definiera,
aceptamos que:

$$5 - 7 = -2$$

surgiendo así los números **enteros negativos.**

10

Ahora,
diremos que

$$\frac{25}{7}$$

representa

un número,

resultado de la división del entero 25
entre el entero 7.

11

Queda así definido un nuevo tipo de números que
llamaremos **fraccionarios.**

12

En general,
podemos representar
un número fraccionario así:

$$\frac{a}{b}$$

en que:

$a, b \in \mathbb{Z}$

$b \neq 0$

a no es múltiplo de b

13

Entonces,

$$\frac{3}{5}$$

¿Representa un número fraccionario?

Sí/No

Sí,
puesto que:
$3 \in \mathbb{Z}$
$5 \in \mathbb{Z}$
$5 \neq 0$
3 no es múltiplo de 5

14

$$\frac{1}{4}$$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

Sí,
puesto que:
$1 \in \mathbb{Z}$
$4 \in \mathbb{Z}$
$4 \neq 0$
1 no es múltiplo de 4

15

$$\frac{27}{45}$$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

Sí,
puesto que:
$27 \in \mathbb{Z}$
$45 \in \mathbb{Z}$
$45 \neq 0$
27 no es múltiplo de 45

16

$$\frac{12}{3}$$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

No,
puesto que:
$12 \in \mathbb{Z}$
$3 \in \mathbb{Z}$
$3 \neq 0$
pero 12 es múltiplo de 3

17

$$\frac{12}{3}$$

Representa un número [_____]

entero

$$\left(\frac{12}{3} = 4\right)$$

18

$$\frac{0}{5}$$

¿Representa
un número fraccionario?

No,
puesto que:
$0 \in \mathbb{Z}$
$5 \in \mathbb{Z}$
$5 \neq 0$
pero,
0 **sí** es múltiplo de 5
$(5 \cdot 0 = 0)$

Ver cuadro siguiente.

19

Recordemos que

el **conjunto de los múltiplos de 5** es:

$$M_5 = \{x/x = 5n, n \in \mathbb{Z}\}$$

representado por comprensión,

o $\mathbb{Z} = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots\}$

representado por extensión.

20

Por otra parte:

$$\frac{0}{5} = 0$$

dado que $5 \cdot 0 = 0$.

Entonces

$$\frac{0}{5}$$

representa un número [_____]

entero

21

$\frac{5}{1}$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

No,
puesto que:
$5 \in \mathbb{Z}$
$1 \in \mathbb{Z}$
$1 \neq 0$
pero,
5 es múltiplo de 1
$(1 \cdot 5 = 5)$

22

$\frac{5}{1}$

Representa
un número

entero

$\frac{5}{1} = 5$

23

$\frac{7}{0}$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

No,
puesto que:
$7 \in \mathbb{Z}$
$0 \in \mathbb{Z}$
pero $0 = 0$

24

No debemos olvidar que:

$$\frac{7}{0} = \textbf{número no definido}$$

dado que
no hay ningún número que multiplicado
por 0 sea igual a 7.

25

$$\frac{-5}{4}$$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

Sí,
puesto que:
$-5 \in \mathbb{Z}$
$4 \in \mathbb{Z}$
$4 \neq 0$
(-5) no es múltiplo de 4

26

$$\frac{-12}{4}$$

¿Representa
un número fraccionario?

Sí/No

No,
puesto que:
$-12 \in \mathbb{Z}$
$4 \in \mathbb{Z}$
$4 \neq 0$
pero -12 es múltiplo de 4
$[4\ (-3) = -12]$

27

$$\frac{-12}{4}$$

Representa un número ⌊_____⌋

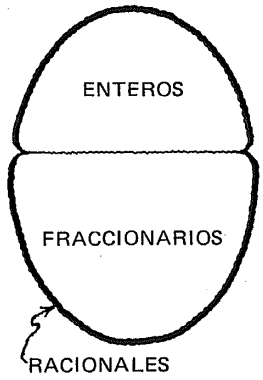
entero

$$\frac{-12}{4} = -3$$

28

Entonces,
podemos establecer el siguiente
conjunto de números,
al que llamaremos:

conjunto de los racionales:

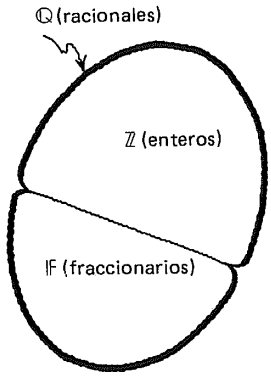


29

El conjunto de los racionales
es
la unión del
conjunto de los enteros
y el
conjunto de los fraccionarios.

Simbólicamente:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}$$



30

Definición:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \;,\; b \neq 0 \right\}$$

31

Ahora bien:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

V/F

V

32

$$\mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

V/F

V

33

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

V/F

V

34

$\mathbb{Z} \cap \mathbb{F} =$ _____

ϕ

35

Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{F}$ son

disjuntos o ajenos.

1.10.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

36

Del conjunto de números mostrado, señalar los que sean **racionales:**

$\frac{2}{5}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{15}{15}$	1	$\frac{2}{7}$	13
$\frac{-3}{7}$	$\frac{-2}{-5}$	0	$\frac{27}{45}$	$\frac{14}{0}$	745
$\frac{4}{2}$	$-\frac{4}{7}$	24	$\frac{100}{200}$	$\frac{24}{8}$	$\frac{0}{0}$
$\frac{20}{4}$	$\frac{225}{15}$	1250	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{0}$	-3

Todos son racionales, excepto:

$\frac{14}{0}$

$\frac{1}{0}$

$\frac{0}{0}$

37

Representación simbólica de un número racional:

$\frac{a}{b}$ ← numerador

denominador

$a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$

38

Atención.

Si a, b $\in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
y a no es múltiplo de b,

$\frac{a}{b}$

representa un número [_____]

fraccionario

39

Si a, b $\in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
y a es múltiplo de b,

$\frac{a}{b}$

representa un número [_____]

entero

40

Si a, b $\in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$,

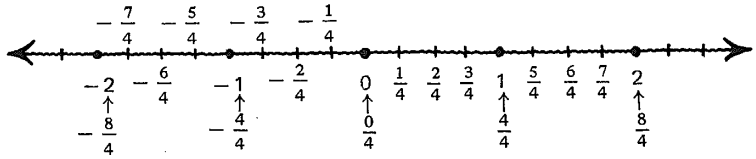
$\frac{a}{b}$

representa un número [_____]

racional

41

En esta gráfica aparece representada una clase de números racionales: la de los que tienen denominador igual a 4:

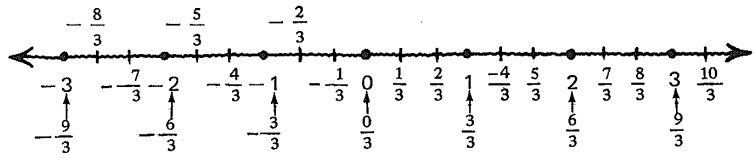


Simbólicamente:

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b = 4 \right\}$$

42

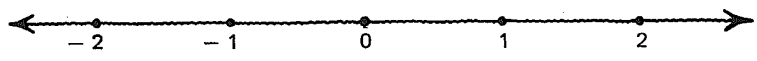
Representación de
otra clase de números racionales:



Simbólicamente:

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b = 3 \right\}$$

43



Al analizar las dos gráficas anteriores, nos damos cuenta de que es imposible representar **todos** los racionales comprendidos entre dos números enteros dados.

44

El **racional** $\frac{2}{1}$ es equivalente al entero [ ]

El **racional** $\frac{4}{2}$ es equivalente al entero [ ]

El **racional** $\frac{6}{3}$ es equivalente al entero [ ]

El **racional** $\frac{8}{4}$ es equivalente al entero [ ]

El **racional** $\frac{10}{5}$ es equivalente al entero [ ]

El **racional** $\frac{12}{6}$ es equivalente al entero [ ]

2

2

2

2

2

2

45

Decimos que los números racionales

$\frac{2}{1}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{10}{5}$

$\frac{4}{2}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{12}{6}$ ...etc.

son **equivalentes.** De hecho, son diversas maneras de representar

el mismo número racional.

46

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = \ldots$$

47

También:

$$\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-6}{-3} = \frac{-8}{-4} = \frac{-10}{-5} = \ldots$$

48

Si generalizamos,
podremos expresar
diversas representaciones
de un mismo número racional,
de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = \frac{a(n)}{b(n)} = \frac{a(-n)}{b(-n)}$$

expresión más simple

$n \in \mathbb{N}$
$n \neq 0$

49

Por ejemplo:

$$\boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \frac{2}{5} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\ldots = \frac{-4}{-10} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \ldots$$

Expresión en su forma más simple, llamada **forma irreducible.**

Para que el racional sea representado en su forma más simple se requiere que

el numerador
y
el denominador
sean
primos entre sí.

50

A la operación que se efectúa para

transformar

un racional
en otro equivalente,
expresado en su forma más simple,
se llama

simplificación.

51

$$\frac{25}{15} =$$

racional equivalente, expresado en su forma más simple

$$\frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{3}$$ (1)

o bien

$$\frac{25 \div 5}{15 \div 5} = \frac{5}{3}$$

$\frac{5}{3}$

5 es el MCD o MFC de 25 y 15

52

$\frac{48}{60} = \square$

$\frac{4}{5}$

53

$\frac{14}{35} = \square$

$\frac{2}{5}$

54

$\frac{120}{150} = \square$

$\frac{4}{5}$

1.10.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

55

Llamamos

fracción

a la representación
de un número racional.

$$\frac{3}{5}, \frac{1}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{10}$$

son ejemplos de fracciones.

56

Si dos fracciones son equivalentes,
por ejemplo

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{4}{10},$$

podemos escribir

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

y observamos que

$$2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$$

57

En general,
si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

entonces

$$a \cdot d = b \cdot c$$

58

Signo de las fracciones:

signo del numerador — signo de la fracción

$$\frac{-a}{(+)\,b} = -\frac{a}{b}$$

signo del denominador

ver también el cuadro siguiente

59

signo del numerador — signo de la fracción

$$\frac{(+)\,a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

signo del denominador

60

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

61

$$\frac{-2}{5} = \square$$

$$-\frac{2}{5}$$

62

$$\frac{10}{-2} = \square$$

$$-5$$

63

$$\frac{-5}{-7} = \square$$

$\frac{5}{7}$

64

$$\frac{-20}{-4} = \square$$

$\frac{20}{4} = \frac{5}{1} = 5$

65

No olvidemos esta regla práctica de los signos para la división:

÷	+	−
+	+	−
−	−	+

Un número racional
puede ser:

- **positivo,** por ejemplo: $\frac{3}{4}$
- **negativo,** por ejemplo: $-\frac{3}{4}$

o

- **cero** 0

1.10.1.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.10.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

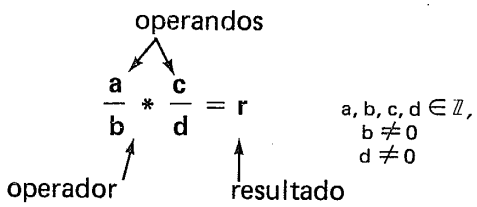
- *explicar* por qué es necesario ampliar el conjunto de los enteros, para que la división se defina para cualquier par de enteros;
- *identificar* los números fraccionarios y los racionales, de un conjunto de números dado;
- *expresar* en la forma más simple un número racional dado;
- *dar* el signo de una fracción, a partir de los signos del numerador y del denominador.

10.2

El grupo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$

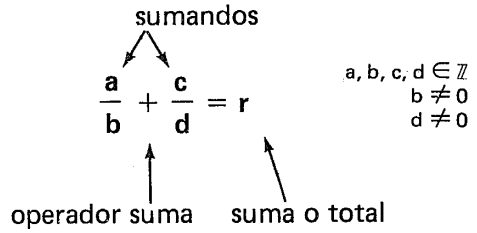
67

Ahora estudiaremos las operaciones binarias fundamentales con racionales, representadas en forma general por medio de la expresión:



68

Adición o suma de números racionales.



69

Definición:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$d \neq 0$

70

Propiedades de
la

suma de racionales

representada por

$(\mathbb{Q}, +)$

71

Cerradura
Si la suma queda definida así:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$d \neq 0$

nos preguntamos si es una
operación cerrada en el conjunto de
los racionales, es decir:

$$¿\ \frac{ab + bc}{bd} \in \mathbb{Q}\ ?$$

Pasemos al cuadro siguiente.

72

Vamos a investigar si:

$$\frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q} \qquad \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}$$

Para que se verifique esto:

ad + bc debe ser un entero, es decir: $ad + bc \in \mathbb{Z}$

y

bd debe ser también un entero, es decir: $bd \in \mathbb{Z}$

73

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ y $d \neq 0$:

$$\mathbf{ad + bc} \in \mathbb{Z}$$

V/F

V

Ver cuadro siguiente

74

$$\mathbf{ad + bc} \in \mathbb{Z}$$

Porque:

$ad \in \mathbb{Z}$ cerradura de la multiplicación en $\mathbb{Z}$

$bc \in \mathbb{Z}$ misma razón

$ad + bc \in \mathbb{Z}$ cerradura de la suma en $\mathbb{Z}$

75

Si b, d $\in \mathbb{Z}$:

$bd \in \mathbb{Z}$

V/F

porque

[ ]

V

la multiplicación es cerrada en $\mathbb{Z}$

76

Entonces:

$$\frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$$

V/F

Razón

[ ]

V
Por la definición de número racional, como cociente de dos enteros.

77

Entonces,
la suma o adición en $\mathbb{Q}$
definida así:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$d \neq 0$

[ ] una operación cerrada en $\mathbb{Q}$.

es/no es

es

78

Simbólicamente:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$d \neq 0$

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

79

Asociatividad

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

V/F

V

(Véase cuadro siguiente)

80

Estudiar con atención.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{a}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$
$b \neq 0$
$d \neq 0$
$f \neq 0$

$$\frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df}$$

$$\frac{(ad + bc)\,f + bde}{bdf} = \frac{adf + b\,(cf + de)}{bdf}$$

$$\frac{adf + bcf + bde}{bdf} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$$

81

Existencia de elemento neutro o de identidad

$$\frac{a}{b} + \square = \frac{a}{b}$$

para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

0

82

0 es el elemento neutro o de identidad de la suma en el conjunto de los racionales.

elemento neutro o de identidad

$$\frac{a}{b} + \boxed{0} = \frac{a}{b}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} = \ldots = \frac{0}{x}$$

$x \neq 0$

83

Estudiar con atención:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$$

1

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{2} = \frac{a \cdot 2 + b \cdot 0}{b \cdot 2} = \frac{a \cdot 2}{b \cdot 2} = \frac{a}{b}$$

Etcétera

84

Existencia de inversos para todos los elementos de $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \underline{\quad\quad} = 0$$

$\forall \ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$-\frac{a}{b}$

85

$-\frac{a}{b}$ es el inverso aditivo de $\frac{a}{b}$;

es decir:

$$\frac{a}{b} + \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_{\substack{\text{inverso aditivo} \\ \text{o} \\ \text{simétrico de } \frac{a}{b}}} = 0 \qquad \forall \ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

86

Conmutatividad

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

V/F

- V

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{cb + da}{db}$$

Por conmutatividad en $(\mathbb{Z}, +)$:

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{da + cb}{db}$$

Por conmutatividad en $(\mathbb{Z}, \times)$:

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

87

Entonces, la estructura

$(\mathbb{Q}, +)$

es un

[ ]

grupo abeliano o
grupo conmutativo

1.10.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la suma de racionales como un grupo abeliano o grupo conmutativo, para el que se cumplen las propiedades siguientes:

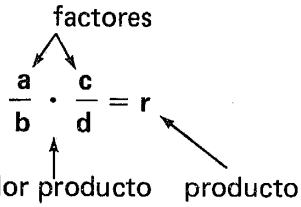
  — cerradura
  — asociatividad
  — existencia de elemento neutro
  — existencia de inversos
  — conmutatividad.

10.3

El grupo abeliano $(\mathbb{Q}_0, X)$

88

Multiplicación de números racionales.



$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

89

Definición:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

90

Propiedades de la multiplicación de números racionales (exclusive el cero), que representamos así:

$(\mathbb{Q}_0, X)$

91

Cerradura

En

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ ¿ $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$?

● Sí,
puesto que:

$ac \in \mathbb{Z}$ cerradura en $(\mathbb{Z}, X)$
y
$bd \in \mathbb{Z}$ cerradura en $(\mathbb{Z}, X)$

$\frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$ definición de número racional

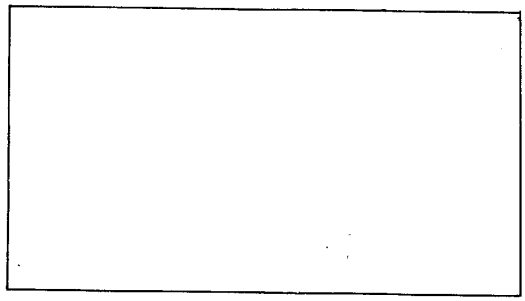
92

La multiplicación
└──────┘
es/no es
una operación
cerrada
en $\mathbb{Q}$.

es

93

Simbólicamente.
cerradura de la multiplicación en $\mathbb{Q}$



Si

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

y

$\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

entonces:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

94

Asociatividad

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

V/F

● V

$\frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df}$

$\frac{ace}{bdf} = \frac{ace}{bdf}$

por la definición de
la multiplicación en $\mathbb{Q}$

95

Existencia de elemento neutro o de identidad

$$\frac{a}{b} \cdot \square = \frac{a}{b}$$

$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

1

96

1 es el elemento neutro o de identidad para la multiplicación en el conjunto de los racionales:

elemento neutro o de identidad en la multiplicación de racionales

$$\frac{a}{b} \cdot \boxed{\quad} = \frac{a}{b}$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \ldots = \frac{x}{x}$$

$x \neq 0$

1

97

Existencia de elementos inversos para todos los elementos de $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \cdot \boxed{\quad} = 1$$

$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$\frac{b}{a}$

98

Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$

puesto que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

*El número racional $\frac{0}{x} = 0$ no tiene inverso multiplicativo.

99

Diremos que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_0$, siendo $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$

100

Conmutatividad

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

V/F

V

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

101

Entonces,
la estructura

$(\mathbb{Q}_0, X)$

es un

_____

grupo
abeliano
o
grupo
conmutativo

1.10.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la multiplicación de racionales como un grupo abeliano o grupo conmutativo para el que se cumplen las propiedades siguientes:

  — cerradura
  — asociatividad
  — existencia de elemento neutro
  — existencia de inversos para todos los elementos de $\mathbb{Q}$, **excepto para el 0**
  — conmutatividad.

10.4

El campo $(\mathbb{Q}_0, +, \times)$

102

Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma

Investigaremos si se cumple:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$

(Véase cuadro siguiente.)

103

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

$$\frac{ad + bc}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ae}{bf} + \frac{ce}{df}$$

$$\frac{(ad + bc) \cdot e}{bdf} = \frac{aedf + bfce}{bfdf}$$

$$\frac{ade + bce}{bdf} = \frac{aed + bce}{bfd}$$

(Continúa en el cuadro siguiente.)

104

Obtenemos:

$$\frac{ade + bce}{bdf} = \frac{ade + bce}{bdf}$$

Se verifica la **distributividad de la multiplicación con respecto a la suma** en $\mathbb{Q}$ (a la derecha)*

* En la misma forma puede demostrarse la distributividad a la izquierda.

105

Entonces,
la estructura representada por $(\mathbb{Q}_0, +, \mathbf{X})$
es un

[_____]

campo
o
cuerpo

106

Podemos hablar de

el campo
de
los
números racionales*.

* Excepto el cero.

1.10.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las propiedades del campo o cuerpo de los números racionales, excepto el cero $(\mathbb{Q}_0, +, \times)$.

10.5

La resta y la división en $\mathbb{Q}$

107

La resta o sustracción en $\mathbb{Q}$.

minuendo sustraendo

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = r$$

operador diferencia diferencia

108

Estudiar detenidamente esta interpretación de la resta como operación **inversa** de la suma.

inverso aditivo de $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$$

$$= \frac{ad + (-bc)}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

109

Entonces,
la resta en $\mathbb{Q}$ puede ser representada así:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

110

La división en $\mathbb{Q}$:

dividendo divisor

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = r$$

operador cociente cociente

111

La división como operación **inversa** de la multiplicación.

inverso multiplicativo de $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \quad \frac{c}{d} \neq 0$

112

Resumen de las cuatro operaciones fundamentales en $\mathbb{Q}$:

1. Suma o adición: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

2. Resta o sustracción: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

3. Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

4. División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \frac{c}{d} \neq 0$

1.10.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir* las expresiones que definen cada una de las cuatro operaciones fundamentales en el conjunto de los racionales, así:

  – suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

  – resta: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

  – multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

  – división: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ para $\frac{c}{d} \neq 0$

10.6

Fracción común y fracción decimal

113

En los cuadros siguientes
estudiaremos
otra forma de representar los números
racionales.

114

Una fracción:

$\frac{3}{4} = \square$

Efectuar la división indicada y escribir el resultado

0.75

115

Tenemos, así, dos clases de fracciones:

$\frac{3}{4} = 0.75$

fracción común

fracción decimal

116

Expresar en forma de fracción decimal las siguientes fracciones comunes:

$\frac{1}{2} =$ ⌊_____⌋

0.5

117

$\frac{2}{5} =$ ⌊____⌋

0.4

118

$\frac{3}{10} = \square$

0.3

119

$\frac{2}{3} = \square$

0.666666 ...

120

Decimos que:

0.75
0.5
0.4
0.3

} son fracciones decimales **exactas**

121

Esta es una

fracción decimal periódica:

$0,\underline{6}6666\ldots$

periodo

122

Dar la fracción decimal equivalente
de cada una de las fracciones comunes siguientes;
si son periódicas, señalar el periodo:

$\frac{1}{3} =$ ⌊_____⌋

$0,\underline{3}33\ldots$

periodo

123

$\frac{8}{33} =$ ⌊_____⌋

$0,\underline{24}2424\ldots$

periodo

124

$$\frac{1}{7} = \underline{\qquad\qquad}$$

periodo

$0.\overline{142857}\ldots$

125

$$\frac{1}{12} = \underline{\qquad\qquad}$$

periodo

$0.\underline{08}\overline{3}33\ldots$

parte
no
periódica

126

$0.\overline{6}66\ldots$

$0.\overline{3}33\ldots$

$0.\overline{142857}\,142857\ldots$

son fracciones decimales

periódicas puras.

127

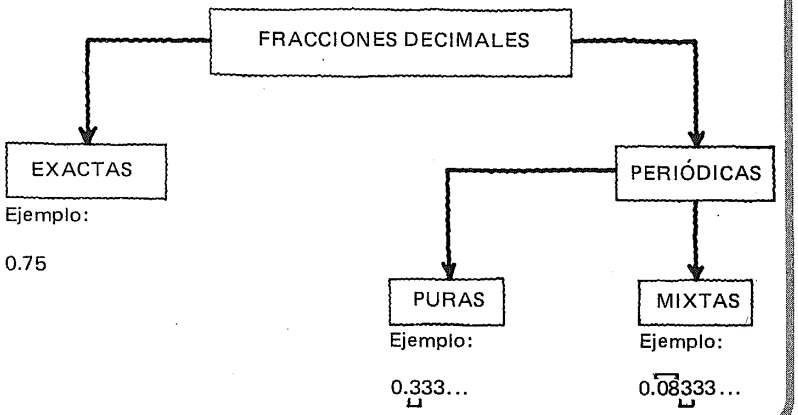
$0.08\overline{3}33\ldots$

es una
fracción decimal

periódica mixta.

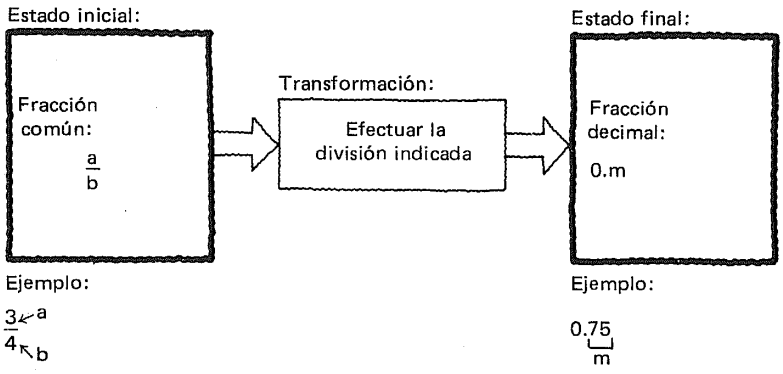
128

Tenemos, entonces:



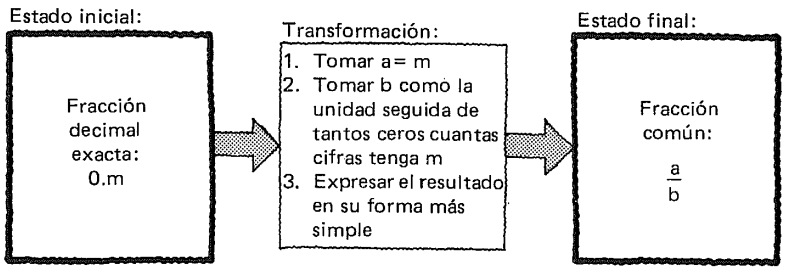
129

Esquema de la transformación de una **fracción común** en **fracción decimal.**



130

Esquema de la transformación de una **fracción decimal exacta** en **fracción común.**



131

Transformar las siguientes fracciones decimales exactas en fracciones comunes, y si se considera necesario, comprobar el resultado por medio de una división:

$0.25 = \square$

$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

132

Veámoslo en esta forma:

- la fracción decimal **0.25** la leemos: ≪veinticinco centésimos ≫
- la podemos rescribir así $\frac{25}{100}$
- y expresar en forma irreducible así: $\frac{1}{4}$

La generalización de este procedimiento conduce a la regla de transformación dada en el cuadro 129.

133

$0.6 = \square$

$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

134

$0.375 = \square$

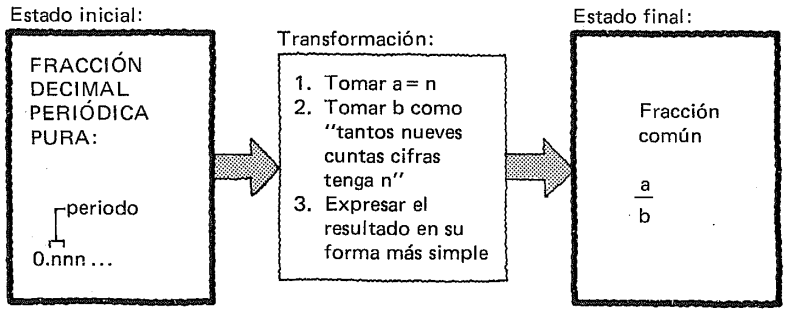
$\frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$

1.10.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

135

Esquema de la transformación de una **fracción decimal periódica pura** en **fracción común.**



136

Transformar las siguientes fracciones decimales periódicas puras, en fracciones comunes, y si se considera necesario, comprobar el resultado por medio de una división:

$0.333\ldots = \underline{\qquad\qquad}$

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

137

Veámoslo en esta forma:

- sea 0.333... una fracción decimal y F la fracción común equivalente a ella que queremos encontrar.
- escribimos: $F = 0.333\ldots$
- multiplicado por 10 ambos miembros, obtenemos:
  $10F = 3.333\ldots$
- Ahora, restamos la primera de la segunda de las ecuaciones que hemos escrito, y obtenemos:

$$\begin{array}{r} 10F = 3.333\ldots \\ F = 0.333\ldots \\ \hline 9F = 3 \end{array}$$

- De donde: $F = \frac{3}{9}$
- O en forma irreducible: $0.333\ldots = \frac{1}{3}$

138

$0.6666\ldots = \underline{\qquad\qquad}$

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

139

$0.121212\ldots = \underline{\qquad\qquad}$

$\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

140

$0.143143\ldots = \underline{\qquad\qquad}$

$\frac{143}{999}$

1.10.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

141

Esquema de la transformación de una
fracción decimal periódica mixta en **fracción común.**

Estado inicial:

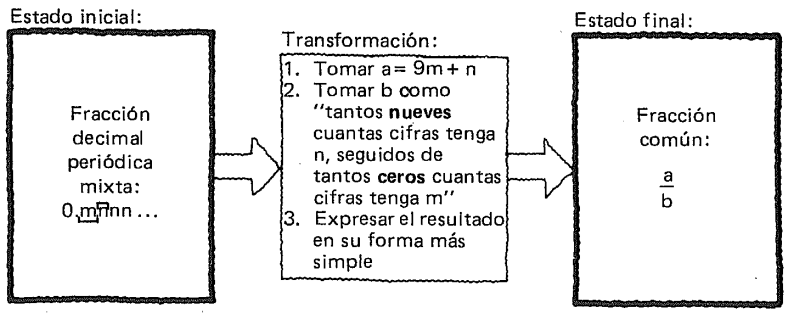
Fracción decimal periódica mixta: $0.m\overline{n}nn\ldots$

Transformación:

1. Tomar $a = 9m + n$
2. Tomar b como "tantos **nueves** cuantas cifras tenga n, seguidos de tantos **ceros** cuantas cifras tenga m"
3. Expresar el resultado en su forma más simple

Estado final:

Fracción común: $\frac{a}{b}$



142

Transformar las siguientes fracciones decimales periódicas mixtas, en fracciones comunes, y si se considera necesario, comprobar el resultado por medio de una división:

$$0.8333\ldots = \boxed{}$$

$$0.\overset{m}{8}\underset{n}{3}33\ldots$$

$$\frac{9 \times 8 + 3}{90} = \frac{72 + 3}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

143

Observemos lo siguiente:

- Si $0.333\ldots = \frac{3}{9}$
- $0.0333\ldots = \frac{3}{90}$
- $0.00333\ldots = \frac{3}{900}$
- $0.000333\ldots = \frac{3}{9000}$

Etcétera.

144

Ahora bien, tenemos la fracción decimal 0.8333... y queremos una fracción común equivalente a ella.

- Observamos que: $0.8333\ldots = 0.8 + 0.0333\ldots$
- 0.8 es una fracción decimal exacta equivalente a la fracción común $\frac{8}{10}$.
- $0.0333\ldots = \frac{3}{90}$, de acuerdo con lo visto en el cuadro anterior.
- Por lo tanto, $0.8333\ldots = \frac{8}{10} + \frac{3}{90}$
- Y: $\frac{8}{10} + \frac{3}{90} = \frac{8 \times 90 + 10 \times 3}{10 \times 90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$
- De modo que: $0.8333\ldots = \frac{5}{6}$.

145

$0.1666\ldots = \square$

m

$0.1\boxed{6}66\ldots$

n

$\frac{9 \times 1 + 6}{90} = \frac{9 + 6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

146

$0.27333\ldots = \boxed{}$

$$0.\overset{m}{\overbrace{27}}\underset{n}{\underbrace{3}}33\ldots$$

$$\frac{27 \times 9 + 3}{900} = \frac{243 + 3}{900}$$

$$= \frac{246}{900} = \frac{41}{150}$$

147

$0.0333\ldots = \boxed{}$

$$0.\overset{m}{\overbrace{0}}\underset{n}{\underbrace{3}}33\ldots$$

$$\frac{9 \times 0 + 3}{90} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

148

$0.000666\ldots = \boxed{}$

$$0.\overset{m}{\overbrace{000}}\underset{n}{\underbrace{6}}66\ldots$$

$$\frac{9 \times 0 + 6}{9000} = \frac{6}{9000}$$

$$= \frac{1}{1500}$$

149

$0.08333\ldots = \square$

m
0.08333...
n

$\frac{9 \times 8 + 3}{900} = 72 + 3$

$\frac{72 + 3}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}$

150

$0.0222\ldots = \square$

m
0.0222...
n

$\frac{9 \times 0 + 2}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

151

$0.001666\ldots = \square$

m
0.001666...
n

$\frac{9 \times 1 + 6}{9000} = \frac{15}{9000}$

$= \frac{1}{600}$

1.10.6.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

152

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción común
y
$a < b$
decimos que

$\frac{a}{b}$ es una **fracción común propia.**

Por ejemplo: $\frac{3}{4}$

153

fracción común propia → $\frac{a}{b}$ = 0.m ← fracción decimal equivalente

Si $a < b$: $\frac{a}{b} = 0.m$

Por ejemplo: $\frac{3}{4} = 0.75$

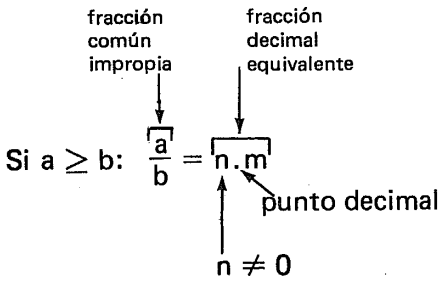
154

Si a = b, entonces:

$$\frac{a}{b} = 1$$

Por ejemplo: $\frac{5}{5} = 1$

155



156

Ejemplo de una fracción común impropia y su fracción decimal equivalente:

$$\frac{7}{5} = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

resultado de la división

1.4

$$5\overline{)7}\quad 1$$
$$2$$

(véase cuadro siguiente)

157

Estudiar con mucha atención.

El resultado también suele escribirse así:

cociente entero
↓
$1\ \frac{2}{5}$ ← residuo
← divisor

expresión que no debe interpretarse como

$1 \cdot \frac{2}{5}$ sino como $\longrightarrow 1 + \frac{2}{5}$

158

Atención

A $\boxed{1\ \frac{2}{5}}$ se le llama

expresión mixta

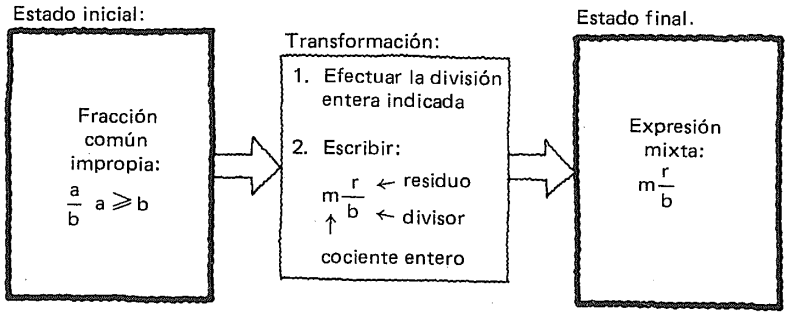
equivalente a la fracción común impropia → $\frac{7}{5}$

significa

$\boxed{1 + \frac{2}{5}}$

159

Esquema de la transformación de una **fracción común impropia** en **expresión mixta.**



160

Dar la expresión mixta equivalente de cada una de las fracciones comunes impropias siguientes:

$\frac{9}{4} =$ ________

$$4 \overline{)9} \quad \text{cociente } 2, \text{ resto } 1$$

$2\frac{1}{4}$

161

$\frac{17}{5} =$ ________

$$5 \overline{)17} \quad \text{cociente } 3, \text{ resto } 2$$

$3\frac{2}{5}$

162

$\frac{3}{2} =$ ________

$$2 \overline{)3} \quad \text{cociente } 1, \text{ resto } 1$$

$1\frac{1}{2}$

1.10.6.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

163

Ahora,
se requiere encontrar la fracción común impropia equivalente a la expresión mixta:

$$3\frac{2}{5}$$

Recordemos que $3\frac{2}{5}$ significa

$$3 + \frac{2}{5}$$

164

$$3 + \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{1} + \frac{2}{5}$$

Por la definición de la suma en $\mathbb{Q}$:

$$= \frac{3 \times 5 + 1 \times 2}{1 \times 5}$$

$$= \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

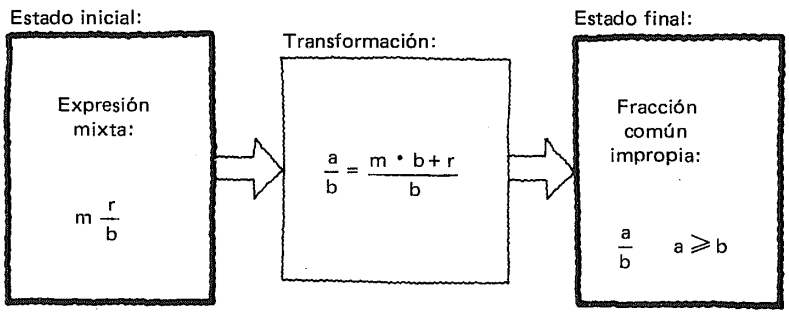
165

Observemos con mucha atención.

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5}$$

166

Esquema de la transformación de una **expresión mixta** en una **fracción común impropia.**



167

Determinar la fracción común impropia equivalente de cada una de las siguientes expresiones mixtas:

$$1\frac{1}{2} = \square$$

$$\frac{1 \times 2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

168

$1\frac{3}{4} = \square$

$\frac{1 \times 4 + 3}{4} = \frac{7}{4}$

169

$3\frac{1}{3} = \square$

$\frac{3 \times 3 + 1}{3} = \frac{10}{3}$

170

$7\frac{2}{5} = \square$

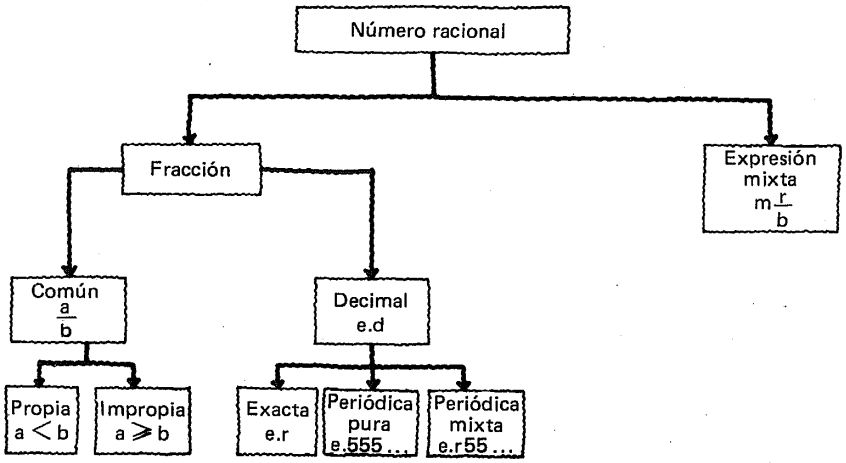
$\frac{7 \times 5 + 2}{5} = \frac{37}{5}$

1.10.6.5

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

171

Esquema de las diversas formas de representar un número racional.



1.10.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la fracción decimal (exacta, periódica pura o periódica mixta) equivalente de una fracción común;
- *determinar* la fracción común equivalente de una fracción decimal (exacta, periódica pura o periódica mixta);
- *determinar* la expresión mixta equivalente de una fracción común impropia;
- *determinar* la fracción común impropia equivalente de una expresión mixta.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100